Dans tout le problème, n est un entier supérieur à 1, donné.

La partie III est indépendante des parties I et II.

Dans les parties I et II les n nombres réels positifs $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ vérifient :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \lambda_n > 0 .$$

I

1° *a*. En étudiant l'ensemble des c_k définis, pour $k = 1, \ldots, n$, par

$$c_k = 1 - \frac{k}{\lambda_k} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} \tag{1}$$

montrer qu'il existe un entier r, $1 \leqslant r \leqslant n$, tel que

— pour $1 \leqslant k \leqslant r$ on ait

$$\frac{1}{\lambda_k} < \frac{1}{k}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)$$

— pour les valeurs de k, s'il en existe, telles que $r < k \leqslant n$ on ait

$$\frac{1}{\lambda_k} \geqslant \frac{1}{k}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right).$$

b. Montrer que, si $r < n$, alors $\lambda_{r+1} < \lambda_r$.

2° Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$M_k = k^{-k}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)^k \prod_{j=1}^{k} \lambda_j . \tag{2}$$

On veut montrer que, pour $1 \leqslant k < r$, on a

$$M_{k+1} > M_k . \tag{3}$$

a. Montrer que, pour $t \in \mathbf{R}^+$, $t > 0$, $t \neq \frac{1}{k}$, on a :

$$(1 + t)^{k+1} > kt\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

b. Exprimer le rapport $\frac{M_{k+1}}{M_k}$ en fonction de k et de

$$x = \frac{1}{\lambda_{k+1}}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)^{-1}$$

c. Montrer que, lorsque $1 \leqslant k < r$, on a

$$0 < x < \frac{1}{k}$$

d. En déduire l'inégalité (3) cherchée.

II

L'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ étant muni de sa base canonique, on désigne par P le point de coordonnées $(p_1, p_2, \ldots p_n)$.

Soient D et Δ les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis respectivement par :

$$D = \{P / \; p_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n ; \; \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 1\}$$

$$\Delta = \{P / \; P \in D ; \; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

Soit φ l'application de D dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(P) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i p_i) .$$

On veut résoudre le problème :

(P1) Trouver le maximum de φ sur D.

1° Montrer que D est fermé et borné dans $\mathbf{R}^n$ et que φ est continue sur D. En déduire qu'il existe au moins un élément P^* de D tel que

$$\varphi(P) \leqslant \varphi(P^*) \qquad \forall P \in D .$$

2° Montrer que P^* est un élément de Δ.

3° On définit l'application ψ de D dans $\mathbf{R}$ par

$$\psi(P) = -\log[\varphi(P)] .$$

Montrer que ψ est strictement convexe sur D, c'est-à-dire que :

$$\forall P_1 \in D, \quad \forall P_2 \in D, \quad P_1 \neq P_2, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad 0 < \alpha < 1,$$
$$\psi(\alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2) < \alpha \psi(P_1) + (1 - \alpha) \psi(P_2) .$$

On pourra utiliser la convexité stricte, pour $x > 0$ et $\lambda > 0$, de la fonction

$$x \longmapsto -\log(1 + \lambda x) .$$

.../...

4° En déduire que ψ est strictement convexe sur Δ, puis montrer l'unicité de P* dont on désignera dans la suite les coordonnées par $p_1^*, p_2^*, \ldots p_n^*$.

5° *a.* Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ montrer que, si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $p_i^* = p_j^*$, et que, si $\lambda_i > \lambda_j$, alors $p_i^* \geqslant p_j^*$.

b. Soit k le plus grand entier tel que $p_k^* > 0$, de telle sorte que $p_1^* \geqslant p_2^* \geqslant \ldots \geqslant p_k^* > 0$ et $p_{k+1}^* = \ldots = p_n^* = 0$.

Montrer que les nombres p_i^* $(i = 1, \ldots, k)$ sont déterminés par le système :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}(p_1^*, \ldots, p_k^*) = \dfrac{\partial\theta}{\partial p_2}(p_1^*, \ldots, p_k^*) = \ldots = \dfrac{\partial\theta}{\partial p_k}(p_1^*, \ldots, p_k^*) \\ p_1^* + \ldots + p_k^* = 1 \end{cases}$$

où l'on a posé $\theta(p_1, \ldots, p_k) = \psi(p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0)$

6° Résoudre le système (4).

Montrer que, si r est l'entier défini en I, 1°, on a $1 \leqslant k \leqslant r$ et que $\varphi(P^*)$ est l'un des nombres $M_1, \ldots, M_r$ définis par (2).

7° En déduire la solution du problème (P1).

III

Toutes les matrices étudiées dans la suite sont carrées, d'ordre n, et à coefficients dans **C**. On désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ces matrices.

Si A est une matrice d'éléments (a_{ij}), on désigne par :

$\bar{A}$ la matrice imaginaire conjuguée, ${}^tA$ la matrice transposée, A^{-1} la matrice inverse si elle existe, A^* la matrice adjointe ($A^* = {}^t\bar{A}$), detA le déterminant de A, trA la trace de A ($\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

On note I la matrice unité.

On rappelle qu'une matrice U est unitaire si $UU^* = I$ et on note $\mathfrak{U}$ le groupe multiplicatif des matrices unitaires.

Une matrice H est hermitienne si $H = H^*$. On désigne par $\mathfrak{H}^+$ l'ensemble des matrices hermitiennes semi-définies positives (c'est-à-dire ayant toutes leurs valeurs propres positives ou nulles).

Dans toute cette partie III, A et B sont deux matrices de $\mathfrak{H}^+$ dont les valeurs propres respectives, $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(\mu_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont supposées ordonnées de façon telle que :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$$
$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n \geqslant 0.$$

L'objet de cette partie est de démontrer que

$$(5)\qquad \det(I + AB) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i \mu_i)$$

et d'étudier le cas où l'on a égalité dans (5).

1° Étant données deux matrices de $\mathfrak{M}$, M et N, montrer que toute valeur propre de MN est valeur propre de NM et réciproquement. On admettra, car la démonstration est assez longue, que les ordres de multiplicité d'une valeur propre sont les mêmes pour MN et NM. En déduire que

$$(6)\qquad \det(I + MN) = \det(I + NM).$$

2° Il existe une matrice diagonale L, d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, et une matrice unitaire U telles que

$$A = ULU^*.$$

On désigne par $L^{1/2}$ la matrice diagonale d'éléments $\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}$ et on pose : $A^{1/2} = U L^{1/2} U^*$.

Démontrer successivement que :

$A^{1/2} \in \mathfrak{H}^+$; $A^{1/2} A^{1/2} = A$; $A^{1/2} B A^{1/2} \in \mathfrak{H}^+$; $\det(I + A) \geqslant 1$;

et enfin que $\det(I + AB) \geqslant 1$.

En déduire que les matrices $I + AB$ et $I + BA$ sont inversibles.

3° *a.* Pour $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}$ et $P \in \mathfrak{M}$, on pose

$$[M, N] = MN - NM.$$

Montrer que $\mathrm{tr}\, M\,[N, P] = \mathrm{tr}\, N\,[P, M] = \mathrm{tr}\, P\,[M, N]$

b. En utilisant, après l'avoir démontrée, l'identité

$$B(I + AB)^{-1} A = I - (I + BA)^{-1}$$

exprimer la matrice $D = [B, (I + AB)^{-1} A]$ en fonction des seules matrices $(I + BA)^{-1}$ et $(I + AB)^{-1}$.

c. Montrer que iD est une matrice hermitienne.

4° *a.* Montrer que si A et B commutent ($[A, B] = 0$), elles peuvent être simultanément diagonalisées, c'est-à-dire qu'il existe une matrice unitaire U et deux matrices diagonales L et M telles que

$$A = ULU^* \quad \text{et} \quad B = UMU^*. \qquad \ldots/\ldots$$

On pourra se contenter de faire la démonstration dans le cas où les valeurs propres de A sont toutes distinctes et admettre le résultat général.

b. En utilisant, après démonstration, la proposition :

$\lambda > \lambda' \geqslant 0$, $\mu > \mu' \geqslant 0 \Rightarrow (1 + \lambda\mu)(1 + \lambda'\mu') > (1 + \lambda\mu')(1 + \lambda'\mu)$

démontrer l'inégalité (5)

$$\det (I + AB) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i \mu_i)$$

dans le cas où les matrices A et B commutent.

5° On admettra sans démonstration que l'application φ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\varphi (U) = \det (I + AUBU^*)$$

atteint son maximum sur $\mathcal{U}$, c'est-à-dire qu'il existe $U_0 \in \mathcal{U}$ telle que

$$\det (I + AUBU^*) \leqslant \det (I + AU_0 BU_0^*) \qquad \forall\, U \in \mathcal{U}.$$

On pose $C = U_0 BU_0^*$. C a les mêmes valeurs propres que B.

Montrer que, pour toute matrice unitaire U on a

$$\det (I + AUCU^*) \leqslant \det (I + AC)$$

et donc que

$$\det (I + AB) \leqslant \det (I + AC).$$

6° Dans cette question, on veut démontrer que les matrices A et C commutent.

Pour toute matrice hermitienne H, semblable à une matrice diagonale N d'éléments diagonaux $\nu_1, \ldots, \nu_n$ ($H = UNU^*$, $U \in \mathcal{U}$), et pour tout nombre réel t, on définit la matrice diagonale e^{itN} d'éléments diagonaux $(e^{it\nu_j})_{j=1,\,n}$, et la matrice

$$e^{itH} = U e^{itN} U^*$$

a. Montrer que e^{itH} est unitaire.

b. Montrer que l'application $f : t \longmapsto \det (I + Ae^{itH} Ce^{-itH})$ est une application continue et dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et que l'on a

$$f(t) \leqslant f(0) \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

En déduire que $f'(0) = 0$.

c. En utilisant le développement de e^{itV} en série entière en t montrer que l'on peut écrire :

$$I + Ae^{itH} Ce^{-itH} = A_1 + tA_2 + t^2 R(t)$$

où A_1 et A_2 sont des matrices indépendantes de t, que l'on explicitera, et R (t) une matrice dont les éléments sont des fonctions dérivables de t.

d. Montrer que A_1 est inversible et que l'on a

$$f'(0) = \det A_1 \,.\, \mathrm{tr}\,(A_1^{-1} A_2).$$

e. En utilisant convenablement les résultats de III, 3° *a.* et III, 3° *b.* montrer que l'on a, pour toute matrice hermitienne H,

$$\mathrm{tr}\,\{H((I + AC)^{-1} - (I + CA)^{-1})\} = 0$$

f. Par un choix convenable de H dans l'égalité précédente, en déduire que les matrices A et C commutent.

7° Déduire de l'ensemble des résultats précédents que

$$\det (I + AB) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i \mu_i) \tag{5}$$

et que, s'il y a égalité dans (5), alors les matrices A et B commutent.

IV

Soit D une matrice de $\mathcal{H}^+$ dont on suppose toutes les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ distinctes et non nulles :

$$\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_n > 0.$$

On désigne par Λ la matrice diagonale d'éléments diagonaux $(\lambda_i)_{i=1,\,n}$ et par U_0 une matrice unitaire telle que

$$D = U_0 \Lambda U_0^*$$

On veut résoudre le problème :

(P2) Parmi toutes les matrices G de $\mathfrak{M}$ qui vérifient

$$\mathrm{tr}\,(GG^*) \leqslant 1$$

déterminer celles qui rendent maximum la quantité

$$S = \det (I + GDG^*)$$

1° On résout tout d'abord le problème

(P3) Parmi toutes les matrices V de $\mathcal{H}^+$ qui vérifient

$$\mathrm{tr}\, V \leqslant 1$$

déterminer celles qui rendent maximum la quantité

$$T = \det (I + \Lambda V)$$

En utilisant les résultats de I, II et III, montrer que (P3) admet une solution unique, qui est une matrice diagonale V_0 que l'on déterminera.

2° Résoudre (P2) en montrant que les solutions s'expriment simplement en fonction de $G_0 = V_0^{1/2}$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail